

令和 8 年度大学院入学試験

解答・出題意図

ミクロ経済学（金融プログラム）

問題番号	正解
問1. (1)	次のような実現可能な配分 y が存在しない： 1. 任意の $i \in N$ に対して $y_i \succeq_i x_i$ 2. ある $i \in N$ に対して $y_i \succ_i x_i$
(2)	証明の詳細は省略する。選好の凸性を理解しているか（例えば以下が得られることがわかるか $\frac{1}{2}(\Omega - x_i) + \frac{x_i}{2} \succeq_i \Omega - x_i$ など）を確認する意図がある。
(3)	証明の詳細は省略する。価格メカニズムを用いる限り、所得が皆同じであれば買えるものは同じなのだから、誰も誰かを羨望することはないという発想に至れるかを確認する意図がある。

ミクロ経済（金融プログラム）

問 2 の解答 *

* 本解答は、ミクロ経済学・マクロ経済学 問 1-2、金融プログラム入試のミクロ経済学 問 2 の解答でもある。

問題番号	正解
1.	$\alpha(s_{-i}) = \{j \in N \setminus \{i\} : s_j = \alpha\} $ $\beta(s_{-i}) = 9 - \alpha(s_{-i})$
2.	任意の s について、 $u_i(\alpha, s_{-i}) = -(12 + 1.8\alpha(s_{-i})) + 1.8 = -13.8 - 1.8\alpha(s_{-i})$ $u_i(\beta, s_{-i}) = -(12 + 1.8(9 - \alpha(s_{-i}))) + 1.8 = -30 + 1.8\alpha(s_{-i})$
3.	ナッシュ均衡 s^* は以下を満たす戦略の組となる。 $\alpha(s^*) = 5$ ここで $\alpha(s)$ は $\alpha(s_{-i})$ を $\alpha(s) = \{j \in N : s_j = \alpha\}$ と拡張した関数。
4.	バイパスを通るルートを経路 γ とする。 ナッシュ均衡 s^* は以下のいずれかを満たす戦略の組となる。 $\alpha(s^*) = 1, \beta(s^*) = 1, \gamma(s^*) = 8、$ $\alpha(s^*) = 1, \beta(s^*) = 0, \gamma(s^*) = 9、$ $\alpha(s^*) = 0, \beta(s^*) = 1, \gamma(s^*) = 9$
5.	バイパスによって均衡における総移動時間は増加する。

【統計学・計量経済学（金融プログラム）】

【問 1】

(a) 証明:

任意の $\epsilon > 0$ をとる。マルコフの不等式を用いると、任意の n に対して以下の不等式が成り立つ。

$$P(|X_n - X| \geq \epsilon) = P(|X_n - X|^2 \geq \epsilon^2) \leq \frac{\mathbb{E}[|X_n - X|^2]}{\epsilon^2}$$

仮定より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^2] = 0$ であるため、右辺の極限は 0 となる。したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

これは X_n が X に確率収束することの定義である。よって、 $X_n \xrightarrow{p} X$ が示された。

(b) 証明:

任意の $\epsilon > 0$ をとる。三角不等式より、

$$|(X_n + Y_n) - (a + b)| = |(X_n - a) + (Y_n - b)| \leq |X_n - a| + |Y_n - b|$$

である。したがって、

$$\{|(X_n + Y_n) - (a + b)| \geq \epsilon\} \subset \{|X_n - a| + |Y_n - b| \geq \epsilon\}$$

$$\{|X_n - a| + |Y_n - b| \geq \epsilon\} \subset \{|X_n - a| \geq \epsilon/2\} \cup \{|Y_n - b| \geq \epsilon/2\}$$

$$P(|(X_n + Y_n) - (a + b)| \geq \epsilon) \leq P(|X_n - a| \geq \epsilon/2 \cup |Y_n - b| \geq \epsilon/2)$$

$$\leq P(|X_n - a| \geq \epsilon/2) + P(|Y_n - b| \geq \epsilon/2)$$

仮定より $X_n \xrightarrow{p} a$ かつ $Y_n \xrightarrow{p} b$ なので、右辺の各項は $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束する。したがって、左辺も 0

に収束し、 $X_n + Y_n \xrightarrow{p} a + b$ が示された。

(c) 確率変数列 $\{X_n\}$ を以下のように定義する。

$$X_n = \begin{cases} n & (\text{確率 } \frac{1}{n}) \\ 0 & (\text{確率 } 1 - \frac{1}{n}) \end{cases}$$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対し、 n が十分大きく $1/n < \epsilon$ となれば、

$$P(|X_n - 0| \geq \epsilon) = P(X_n = n) = \frac{1}{n}$$

である。 $n \rightarrow \infty$ のとき $1/n \rightarrow 0$ なので、 $X_n \xrightarrow{p} 0$ である。

- 各 n における期待値を計算すると、

$$\mathbb{E}[X_n] = n \times \frac{1}{n} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

となる。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = 1 \neq 0$ となり、期待値は 0 に収束しない。

【問 2】

(a)

$$c = \frac{1}{2}$$

(b)

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1 - |y| & (-1 \leq y \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(c) y を $-1 < y < 1$ と固定したとき、

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-|y|)} & -(1-|y|) \leq x \leq 1-|y| \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- 問1. 1. (1) (出題意図) 最小二乗法において説明変数が内生変数である場合に生じる推定バイアスについて、具体的な例で理解を確認する。
(解答のポイント)
- * x_i と y_i 双方と関連する適切なバイアス要因を挙げられているか。
 - * 挙げた要因についてバイアスの方向を正しく議論できているか。
- (2) (出題意図) 適切な操作変数に求められる仮定について、具体的な例で理解を確認する。
(解答のポイント)
- * 関連性の仮定を正しく説明できているか。
 - * 外生性の仮定を正しく説明できているか。
 - * 「降雨量」という操作変数候補について上記2つの仮定を正しく議論できているか。
2. (正解) 単回帰モデルの最小二乗推定量 $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ は以下の目的関数を最小化する解として得られる。

$$Q(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_i)^2$$

1階の条件より、

$$0 = \frac{\partial Q(b_0, b_1)}{\partial b_1} \Big|_{b_0=\hat{\beta}_0, b_1=\hat{\beta}_1} = \sum_{i=1}^N 2(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) \cdot (-x_i) = -2 \sum_{i=1}^N \hat{u}_i x_i$$

$$\therefore \sum_{i=1}^N \hat{u}_i x_i = 0 \quad \square$$

3. (正解) 尤度関数 $L(\lambda)$ は

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^N P_X(x_i; \lambda) = \prod_{i=1}^N \frac{\lambda^{x_i} \exp(-\lambda)}{x_i!}$$

これより対数尤度関数 $LL(\lambda) = \ln(L(\lambda))$ は

$$\begin{aligned} LL(\lambda) &= \ln(L(\lambda)) = \ln \left(\prod_{i=1}^N \frac{\lambda^{x_i} \exp(-\lambda)}{x_i!} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\lambda^{x_i} \exp(-\lambda)}{x_i!} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N [x_i \ln(\lambda) - \lambda - \ln(x_i!)] \\ &= \ln(\lambda) \sum_{i=1}^N x_i - N\lambda - \sum_{i=1}^N \ln(x_i!) \end{aligned}$$

よって最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は1階の条件より

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial LL(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{\hat{\lambda}} - N \\ \Rightarrow \hat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}. \end{aligned}$$

問2. 1. (正解)

$$y_{it} = \alpha_i + \beta x_{it} + \epsilon_{it}$$

を $t = 1, \dots, T$ について足し合わせ両辺 T で割ると、 $\bar{\epsilon}_i = \sum_{t=1}^T \epsilon_{it}/T$ として

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T y_{it}/T &= \sum_{t=1}^T \alpha_i/T + \beta \sum_{t=1}^T x_{it}/T + \sum_{t=1}^T \epsilon_{it}/T \\ \Leftrightarrow \bar{y}_i &= \alpha_i + \beta \bar{x}_i + \bar{\epsilon}_i \end{aligned}$$

最初の式からこの式を辺々引くと、 $\dot{\epsilon}_{it} = \epsilon_{it} - \bar{\epsilon}_i$ として

$$\dot{y}_{it} = \beta \dot{x}_{it} + \dot{\epsilon}_{it}$$

となる。

よって $\hat{\beta}_{FE}$ は以下の目的関数を最小化する b として得られる。

$$Q(b) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T (\dot{y}_{it} - b \dot{x}_{it})^2$$

1階の条件より、

$$\begin{aligned}
0 &= \left. \frac{\partial Q(b)}{\partial b} \right|_{b=\hat{\beta}_{FE}} \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T 2(\dot{y}_{it} - \hat{\beta}_{FE} \dot{x}_{it}) \cdot (-\dot{x}_{it}) \\
&= -2 \left[\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \dot{y}_{it} \dot{x}_{it} - \hat{\beta}_{FE} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \dot{x}_{it}^2 \right] \\
\Rightarrow \hat{\beta}_{FE} &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \dot{y}_{it} \dot{x}_{it}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \dot{x}_{it}^2}
\end{aligned}$$

2. (正解)

$$\begin{aligned}
y_{it} &= \alpha_i + \beta x_{it} + \epsilon_{it} \\
y_{i,t-1} &= \alpha_i + \beta x_{i,t-1} + \epsilon_{i,t-1}
\end{aligned}$$

上式から下式を引いて、 $\Delta \epsilon_{it} = \epsilon_{it} - \epsilon_{i,t-1}$ とすると

$$\Delta y_{it} = \beta \Delta x_{it} + \Delta \epsilon_{it} \quad (t = 2, \dots, T)$$

よって $\hat{\beta}_{FD}$ は以下の目的関数を最小化する b として得られる。

$$Q(b) = \sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T (\Delta y_{it} - b \Delta x_{it})^2$$

1階の条件より、(1)と同様の計算から

$$\hat{\beta}_{FD} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \Delta y_{it} \Delta x_{it}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=2}^T \Delta x_{it}^2}$$

3. (正解) $T = 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
\dot{y}_{i1} &= y_{i1} - \frac{y_{i1} + y_{i2}}{2} = \frac{y_{i1} - y_{i2}}{2} = -\frac{1}{2} \Delta y_{i2} \\
\dot{y}_{i2} &= y_{i2} - \frac{y_{i1} + y_{i2}}{2} = \frac{y_{i2} - y_{i1}}{2} = \frac{1}{2} \Delta y_{i2}
\end{aligned}$$

同様に $x_{i1} = -\Delta x_{i2}/2$ 、 $x_{i2} = \Delta x_{i2}/2$ 。 よって

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_{FE} &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^2 x_{it} y_{it}}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^2 x_{it}^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N (x_{i1} y_{i1} + x_{i2} y_{i2})}{\sum_{i=1}^N (x_{i1}^2 + x_{i2}^2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_{i2} \Delta y_{i2} + \Delta x_{i2} \Delta y_{i2})}{\sum_{i=1}^N (\Delta x_{i2}^2 + \Delta x_{i2}^2)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^N \Delta x_{i2} \Delta y_{i2}}{\sum_{i=1}^N \Delta x_{i2}^2} \\
&= \hat{\beta}_{FD}
\end{aligned}$$

と $\hat{\beta}_{FE} = \hat{\beta}_{FD}$ であることが示された。 $\square$