受験番号	

横浜国立大学大学院国際社会科学府
経済学専攻博士課程前期
一般入試（２科目受験者）
令和７年度（２次募集）
学　力　検　査　問　題
試験問題冊子（専門科目）

《注意事項》

1．試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。

2．受験番号を、この冊子と解答用紙・計算用紙に必ず記入してください。また、氏名も解答用紙に必ず記入して下さい。

3．落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合には、申し出てください。

4．試験時間　９：００～１１：００
　試験開始後４０分間は退室できません。また、試験終了１０分前からは途中退室できません。

5．問題は、「ミクロ経済学・マクロ経済学 I」「ミクロ経済学・マクロ経済学 II」「経済史」「経済政策」「統計学」「計量経済学」の６科目から出題されています。

6．これら６科目から２科目を選択し、解答してください。ただし、選択できる２科目の組合せは次の７通りのいずれかです。

1) 「ミクロ経済学・マクロ経済学　I」と「ミクロ経済学・マクロ経済学　II」の２科目
2) 「ミクロ経済学・マクロ経済学　I」と「経済史」の２科目
3) 「ミクロ経済学・マクロ経済学　I」と「経済政策」の２科目
4) 「ミクロ経済学・マクロ経済学　I」と「統計学」の２科目
5) 「ミクロ経済学・マクロ経済学　I」と「計量経済学」の２科目
6) 「経済史」と「経済政策」の２科目
7) 「統計学」と「計量経済学」の２科目

なお、出願時に申請した２科目の組合せ以外でも選択可能です。

7．解答は、解答用紙に記入してください。１科目の解答につき、解答用紙１枚を使用してください。その際、専門科目名欄の自分が選択する科目名のところに〇を記入してください。記入されていない場合、採点されないことがあります。解答が用紙２枚以上に渡る場合も、必ずすべての解答用紙の専門科目名欄に〇を記入してください。
　解答は、日本語で行います。ただし、外国人出願者は、英語で解答することもできます。

8．この冊子を持ち帰ってはいけません。

令和７年度（２次募集）
横浜国立大学大学院国際社会科学府
経済学専攻博士課程前期
一般入試（２科目受験者）

専門科目問題目次

【ミクロ経済学・マクロ経済学 I】

すべての問題に解答すること。

問題 1

車両の速度超過により頻繁に交通事故が起きるような路地があるとしよう。あなたは、警察官僚であり、この路地における事故率を減らすため、制限速度を超過する運転手をどのように減らせるかを考えているとする。現在、この地域では以下のようなことが行われている

- 警察官による巡回をランダムな間隔で行っている。
（この路地を通る車両は確率 $\frac{1}{4}$ で警察官に観察されるとしよう。）
- 速度違反車両が警察官に観測された（捕まった）場合、運転者は罰金 $F > 0$ を支払う。

次の仮定の元で、それぞれの小問に答えなさい。

（簡単化のための）仮定:

- 「一般的な速度超過者」は、実数値をとる確率変数を期待効用（表現をもつ選好）によって評価する。
- 「一般的な速度超過者」のもつ期待効用（表現）に対応するフォンノイマン・モルゲンシュテルン効用 (vNM) 関数 $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は狭義単調増加関数であるとする。
- 定数 $(w, F, K) \in \mathbb{R}^3_+$ で $w - 2F \geq 0$ を満たすものを所与として、「一般的な速度超過者」は、(1) 違反をしなければ $u(w)$ の効用を得る;(2) 違反をして警察官に観測されれば $u(w - F)$ の効用を得て、違反をして警察官に観測されなければ、$u(w + K)$ の効用を得る。
状況の解釈： w は「一般的な速度超過者」の持つ資産、K は速度違反をすることで得られる (なんらかの) 報奨金と考えれば良い。

(1) 「一般的な速度超過者」が、速度違反をする（速度違反を強く速度遵守よりも好む）ための必要十分条件を $(w, F, K) \in \mathbb{R}^3_+$ 上に与えなさい。（必要十分条件を答えた場合に

のみ加点する。)

ヒント: u, w, F, K を用いた不等式。

以降の小問では、「一般的な速度超過者」のもつ vNM 関数が次のように与えられていると仮定する：

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \ u(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x \le 10 \\ \frac{1}{2}x + 15 & \text{if } x > 10 \end{cases}$$

(2) 「一般的な速度超過者」は、(A) リスク回避的、(B) リスク中立的、(C) リスク愛好的、(D) いずれでもない、のどれであるか答えなさい。回答は (A) から (D) のアルファベットを答えること。

「一般的な速度超過者」の速度違反を抑えるために、あなたがとることのできる対策が以下の二つであるとする：

対策 1. 警察官による巡回頻度を 2 倍に上げる

(これにより路地を通る車両が警察に出くわす可能性が $\frac{1}{2}$ になるとしよう。)

対策 2. 罰金を 2 倍に上げる（罰金が $2F$ になる。）

(3) 「対策 1 が取られているときに速度違反を行う行為」に対応する確率変数がもつ累積分布関数を $G^1 : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ とし、「対策 2 が取られているときに速度違反を行うという行為」に対応する確率変数がもつ累積分布関数を $G^2 : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ とする。この時、G^1 と G^2 をそれぞれ数学的に記述しなさい。

ヒント：「速度違反を行わないという行為に対応する確率変数が持つ累積分布関数」は以下の関数 G^3 で表される：

$$\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \ G^3(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } r < w \\ 1 & \text{if } r \ge w \end{cases}$$

つまり、「速度違反を行わないという行為」によって資産が r 以下となる確率が $G^3(r)$ で与えられる。

以降の小問では、$(w, F, K) = (10, 5, 20)$ とする。

(4) 対策 1 のもとで違反行為をしたときの期待効用を求めなさい。同様に、対策 2 のもとで違反行為をしたときの期待効用を求めなさい。(つまり、G^1 G^2 のそれぞれを累積分布関数とするようなクジに対する「一般的な速度超過者」の期待効用をそれぞれ求めなさい。)

(5) (4) で得た結果をもとに、「どちらの対策がより、一般的な速度超過者の効用を下げられるか」について述べなさい。つまり、どちらの対策の方が「(一般的な速度超過者が) 速度超過を行うことを防げる」見込みがあるかを答えなさい。回答はどちらの対策が効果的かをまず述べたのちに、数理モデルに基づいた理由を記載すること。

問題２

それぞれの問題に対し、最も正しいと思われるものを選び、その番号を回答用紙に記しなさい。

1. 次のどれが 2023 年の日本の GDP に含まれないか述べよ。
   [1]　アメリカで在外（留学）研究中である横浜国立大学教員の 2023 年に横浜国立大学から支払われた給料
   [2]　日本政府が発注し、2023 年に日本で作られた橋。
   [3]　2022 年に日本で生産され、2023 年に初めて購入された自動車。
   [4]　2023 年にアメリカの企業が日本で生産してアメリカに輸出された半導体。

2. 製鉄会社が鉄を自転車製造会社に 90 万円で売った。自転車製造会社はその鉄を使って、自転車を生産し、消費者に 200 万円で売った。これらの取引のうち GDP に勘定されるのはいくらか。
   [1]　90 万円。
   [2]　110 万円。
   [3]　200 万円。
   [4]　290 万円。

3. A 国と B 国の 2 国を考える。両国の生産関数の形状は同じで、資本の限界生産力は、1 労働力当たりの資本量（$\frac{K}{L}$）の増加に対して、逓減する関数であるとする。（ただし、資本の限界生産力とは、1 労働力当たりの資本量（$\frac{K}{L}$）の限界的増分に対する、1 労働力当たりの生産量($\frac{Y}{L}$)の増分である。）しかし、A 国と B 国では、（過去の）ある年の 1 労働力当たりの資本量（$\frac{K}{L}$）とそれに対応する 1 労働力当たりの生産量（$\frac{Y}{L}$）が異なり、両者とも A 国のほうが B 国より大きいとする。ある年から現在までの、両国の 1 労働力当たりの資本の増分が同じであるとき、ある年から現在までの 1 労働力

当たりの生産量の増分について以下のどれが正しいと思うか。（ただしある年から現在まで、他の生産要素は変わらないとする。）

[1] 1労働力当たりの生産量の増分は、A国の方がB国より高い。

[2] 1労働力当たりの生産量の増分は、A国の方がB国より低い。

[3] 1労働力当たりの生産量の増分は、A国とB国で同じである。

[4] 1労働力当たりの生産量の増分は、A国とB国で比較できない。

4. 以下の表に基づいて答えなさい。消費者がピザとＣＤのみを購入する国を考える。以下の表は、その国の平均的家計の消費である。

	2015年		2016年	
	価格	購入量	価格	購入量
ピザ	1000	20		15
ＣＤ	1250	10		20

2015年を基準年（物価100）として、2016年の物価は110であった。2016年のピザとCDの価格は、以下のどれか。

[1] ピザの価格が1000、CDの価格が1010。

[2] ピザの価格が1100、CDの価格が960。

[3] ピザの価格が1100、CDの価格が1010。

[4] ピザの価格が1200、CDの価格が1175。

5. 日本において、人口12000万人、成人人口10000万人、就業者数7000万人、失業者数200万人である。失業率は、

[1] 1.7%

[2] 2.0%

[3] 2.4%

[4] 2.8%

6. 開放マクロ経済学において、政府支出が1兆円増加したとする。一方、GDP、民間消費、投資は変わらないとする。このとき次のどれが正しいか。

[1] 国民貯蓄が1兆円減少し、純資本流出が1兆円減少する。

[2] 国民貯蓄が 1 兆円増加し、純資本流出が 1 兆円減少する。
[3] 国民貯蓄が 1 兆円減少し、純資本流出が 1 兆円増加する。
[4] 国民貯蓄が 1 兆円増加し、純資本流出が 1 兆円増加する。

7. 日本を含め多くの東アジアの国々は、「東アジアの奇跡」と呼ばれるほど、戦後急速に成長した。つまり、これらの国々は戦争直後、アメリカなどの西欧諸国に比べ、GDP と資本量ははるかに少なかったが、その後現在まで、西欧諸国よりも、GDP の成長率を達成している。以下の文章は、このことがどうして起こったのかを説明している。この文章の空欄 A に入る言葉として適当なものを選びなさい。
「東アジアの国々は戦争直後、労働者一人当たりの資本量は少なく、そのため、労働者一人当たりの GDP は低かった。一方、アメリカなど西洋諸国は、労働者一人当たりの資本量は多く、そのため、労働者一人当たりの GDP は高かった。ソローの経済成長理論によれば、「 A 」ので、東アジアの国々の方が、アメリカなど西洋諸国より、一人当たり GDP の成長率は高くなる。

[1] 資本の限界生産性は逓減する
[2] 研究開発は正の外部性を持つ
[3] 人口成長率が減少する
[4] 三面等価の原則が成立する

8. その一方で、アフリカの国等、長期間にわたって一人当たり GDP が低い状態にある国々もある。以下の文章は、このことがどうして起こったのかを説明している。
『生産関数は「 B 」にも依存し、すでに成長した経済社会の方がその「 B 」が多いので、継続的に発展する。それに対し、成長の遅れた経済社会は成長率がなかなか高まらない。』
B に当てはまらない言葉を選びなさい。

[1] 貯蓄
[2] 収奪的制度
[3] 人的資本
[4] 技術知識

9. 以下の短期の閉鎖マクロモデルに基づいて答えなさい。

$$C = 0.8 \times Y$$
$$I = 8 - 20 \times i$$
$$Y = C + I + G$$
$$G = 10$$
$$M^S = 12$$
$$M^d = 0.4 \times Y - 40 \times i$$

ただし、Y は実質 GDP、 C は民間消費、I は投資、 G は政府支出、i は金利、 M^S はマネーサプライ、 M^d は貨幣需要。

財サービス市場と貨幣市場が同時に均衡する Y を求め、正しいものを以下から選びなさい。

[1] 10
[2] 30
[3] 40
[4] 60

10. 問題 9 の設定で、財サービス市場と貨幣市場が同時に均衡する i を求め、正しいものを以下から選びなさい。

[1] 0.1
[2] 0.2
[3] 0.3
[4] 0.4

【ミクロ経済学・マクロ経済学 II】

すべての問題に解答すること。

問題 1

経営者が所得を税務署に申告する状況を考える。経営者は、正しく申告する (L) か、所得を過小に申告する (M) か、そもそも申告しない (R) か、を選択できる。一方で、税務署は経営者の行動を監査する (T) か、しない (B) か、を選択できる。選択の組に対して、経営者と税務署の利得は以下の表にまとめられている。行列の要素は、左が税務署の利得、右が経営者の利得に対応している。

税務署＼経営者	L	M	R
T	$0, 10$	$-1, -20$	$-2, -10$
B	$10, 10$	$-5, 5$	$-10, 30$

ここで、確率的な行動も選択可能であるとする。以下の設問に答えなさい。

(1) 支配される（純粋な）行動は存在するか？存在する場合はその行動も書きなさい。

(2) 経営者と税務署が同時に行動を選択するとき、ナッシュ均衡を全て求めなさい。

(3) 税務署が先に監査する確率 p を宣言し、経営者は p を知った上で行動を選択する。このとき、部分ゲーム完全均衡を全て求めなさい。

(4) (2) と (3) のそれぞれの均衡において、経営者の行動にどのような差が生じるか監査の観点から説明しなさい。

問題 2

次のようなモデルを考える。時間は二期間 $(t=0,1)$ のみである。家計は 2 タイプ存在する。0 期にはどの家計も y_0 を受け取る。1 期には所得は不確実であり、各家計の所得は確率 $\frac{1}{2}$ で表が出る偏りのないコインで決定されるとする。コインの表 (Head, H) が出た場合、タイプ 1 の家計は y_1、タイプ 2 の家計は $1-y_1$ を受け取り, 裏 (Tail, T) が出たらタイプ 1 の家計は $1-y_1$、タイプ 2 の家計は y_1 を受け取るものとする。ただし、$y_1 \in (0.5, 1)$ である。総人口は 1 であり、タイプ 1 の家計が割合 0.5、タイプ 2 の家計が割合 0.5 で存在するとする。

1 期に不確実性があることから、タイプ $j=1,2$ の家計は次のような期待効用関数を持つ。

$$U^j(c_0^j, c_1^j(H), c_1^j(T)) = \log(c_0^j) + \beta\left[0.5\log(c_1^j(H)) + 0.5\log(c_1^j(T))\right] \tag{1}$$

ただし、$\beta > 0$ は割引率、$c_0^j \geq 0$ は 0 期における消費、$c_1^j(i) \geq 0$ はコインが $i = H, T$ が出た場合の消費である。

1. 家計が保険市場にアクセス可能であるとする。すなわち、コインが $i(j=H,T)$ が実現したらその状態において 1 単位の所得を得られる証券が 0 期に売買可能であるとする。この証券の 0 期での価格を $p(i)$ とし、0 期時点でのタイプ j の家計の取引量を $s^j(i)$ とする。この状況において、コインの出目に応じて予算制約式が存在し、タイプ 1 の家計の予算制約式は
$$\begin{aligned} c_0^1 + p(H)s^1(H) + p(T)s^1(T) &= y_0, \\ c_1^1(H) &= y_1 + s^1(H), \\ c_1^1(T) &= 1 - y_1 + s^1(T) \end{aligned}$$
のように 0 期と 1 期で表と裏が出た場合の三本となる。これらの式から $s^1(H), s^1(T)$ を消去し、一本の予算制約式に書き換えよ。同様に、タイプ 2 の家計についても三本の予算制約式を書き、$s^2(H), s^2(T)$ を消去し一本の予算制約式に書き換えよ。
2. 1. で書き下した家計の予算制約式の元で効用関数 (1) を最大化する場合の最適化のための一階条件を導出し、$(c_0^j, c_1^j(H), c_1^j(T))$ を $Y^j \equiv y_1 + p(H)y_1^j(H) + p(T)y_1^j(T)$ および $(p(H), p(T))$ の関数として計算せよ。ただし、$y_1^j(i)$ はコインの出目が i のときのタイプ j 家計の所得である。
3. $p(i) = \beta y_0,\ i = H, T$ とする。このとき、$\{c_0^1, c_0^2, (c_1^1(i), c_1^2(i))_{i=H,T}\}$ を求めよ。
4. この経済における市場均衡 $\{p(H), p(T), c_0^1, c_0^2, (s^1(i), s^2(i), c_1^1(i), c_1^2(i))_{i=H,T}\}$ を定義し、3. の解答に基づいて市場均衡を求めよ。
5. どちらのタイプの消費者を平等に扱う社会計画者が、各期の総消費は生産量を上回れないという資源制約のもとで消費者の効用を最大化するとき、0 期の消費 (c_0^1, c_0^2) 及び 1 期目に状態 $i = H, T$ のときの家計の消費 $(c_1^1(i), c_1^2(i))_{i=H,T}$ を求めよ。

【経済史】

以下の２つの問題の中から１つを選んで解答しなさい。なお、選んだ問題の番号を解答の冒頭に記しなさい。

問題１　日本経済史

1965 年に発生した証券恐慌について、説明しなさい。また、証券恐慌への政府の対応策と結果、及びその後の日本経済に与えた影響について、説明しなさい。

問題２　西洋経済史

第１次世界大戦においてイギリスは戦勝国となったにもかかわらず、大戦はパクス・ブリタニカと呼ばれるようなイギリス中心の国際経済秩序が崩壊に向かう画期となった。なぜ第１次大戦はイギリス経済にそのような打撃を与えたのか、論じなさい。

【経済政策】

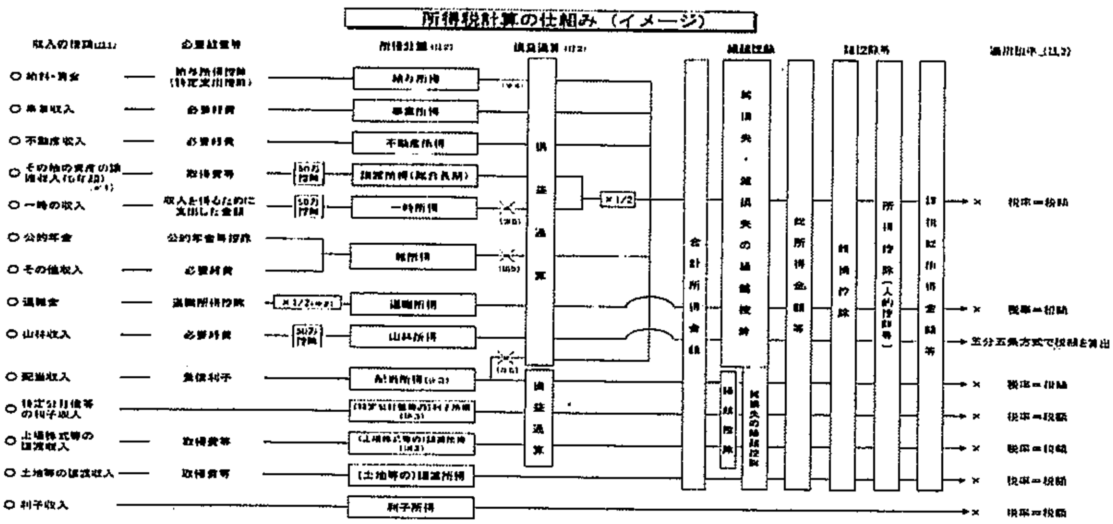
経済政策選択者は、【1】と【2】について、指示に従ってそれぞれ回答しなさい。

【1】 以下の文章を読み、設問（1）～（3）に答えなさい。

租税に財源を依存することから、近代国家は「租税国家」と呼ばれる。この租税国家が持つべき租税体系の基準を示すのが、あるべき租税体系の基準を示す租税原則である。所得税を例に負担の公平性について考えてみよう。現在の日本の所得税制では、(a) 支払能力の高い人にはより高い税負担を求めることが公平だと考える（A）という考え方を根拠に、所得が高くなるほど所得に対して課される税額の割合が高くなるように税率が徐々に高くなる（B）という仕組みが採用されている。ただし、（A）を実現する前提として、支払能力が同じ人には同じ税負担を求めることが公平だという（C）を満たす必要がある。しかし、(b) 図 1 に示される、さまざまな種類の所得の存在と課税の仕方の違いにより、(c) 日本の所得税制の下では、（A）と（C）が崩れてしまっていることがしばしば指摘されるのである。

（出所：横浜国立大学経済学部テキスト・プロジェクトチーム（2019）『ゼロからはじめる経済入門』有斐閣、203～204 頁を一部改変）

図 1. 日本における所得税計算の仕組み



出所：財務省ウェブサイト「わが国の税制の概要」より、一部加工して転載。

(1)　下線部（a）について、(A）～（C）に当てはまる語句を書きなさい。

(2)　下線部（b）について、所得の種類に応じた課税の仕方には二種類ある。それぞれ何という課税の仕方か、また、どのような目的で採用されるか説明しなさい。

(3)　下線部（c）について、何が、なぜ、どのように崩れているか、(1）の（A）～（C）に当てはまる語句、および（2）で回答した二つの課税の仕方の名称を必ず使って説明しなさい。

【2】次の〈1〉から〈3〉のうち、一つを選択して回答しなさい。回答するにあたって、選択した問題番号を明記すること。

〈1〉次の設問（1）と（2）に回答しなさい。

(1)　中央銀行の役割と、中央銀行が行なってきた「伝統的な金融政策」とは何か説明しなさい。

(2)　2001年3月に日本銀行が採用した「非伝統的な金融政策」とはそれぞれどのようなものか、「伝統的な金融政策」との違いが明確になるように説明しなさい。

〈2〉次の設問（1）～（3）に回答しなさい。

(1)　外国投資には間接投資と直接投資がある。それぞれどのような経済活動を指しているか説明しなさい。

(2)　企業が直接投資を行う動機について、「内部化」理論を援用して論じなさい。

(3)　企業が直接投資を行うタイミングについて、「プロジェクト・ライフ・サイクル」理論に基づいて論じなさい。

〈3〉途上国の貧困に関しては、産業振興や企業組織の問題といった市場要因が大きく影響を与えている。途上国経済の貧困要因に関する次の設問に解答しなさい。

(1) 貧困にかかわる4つの市場要因を簡潔に説明しなさい。

(2) それぞれの要因がなぜ途上国に貧困をもたらしたかについて、その背景と関連する事例をあげながら説明しなさい。

【統計学】

以下の2問すべてに解答すること.

問1. ガンマ関数Γは以下のように定義される.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du,\quad \alpha>0.$$

また, $\alpha>0,\beta>0$に対するガンマ分布 (Gamma(α,β)) の密度関数は

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha},\quad x>0$$

と定義される. 以下の問題で,「確率変数Xのモーメント母関数$m_X(t)=E(e^{tX})$とXの確率分布は1対1に対応する」という事実は自由に用いてよい.

1. ガンマ関数の性質 (i)$\Gamma(1)=1$, (ii)$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$, および

$$\text{(iii)}\quad \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u/\beta}du=\Gamma(\alpha)\beta^\alpha$$

を$\alpha>0,\beta>0$に対して示せ.

2. 確率変数XがGamma(α,β)に従うとき, Xのモーメント母関数$m_X(t)=E(e^{tX})$を求めよ.

3. 確率変数X_1,X_2がそれぞれ独立にGamma(α_1,β), Gamma(α_2,β)に従うとする. 和$Y=X_1+X_2$が従う分布を求めよ.

問2では, 以下のことは自由に使ってよい: 確率変数列X_n, $n=1,2,\dots$が, $n\to\infty$のときに, Xに確率収束することを$X_n\to_p X$と書く. これは任意の$\varepsilon>0$に対し,

$$P(|X_n-X|\geqq\varepsilon)\to 0$$

のことである. 確率変数列に対し$X_n\to_p X$, $Y_n\to_p Y$を仮定すると, 以下の収束が成り立つ.

$$X_n\pm Y_n\to_p X\pm Y,\quad X_nY_n\to_p XY,\quad X_n/Y_n\to_p X/Y$$

ただし, 3つ目の収束においては, Yが値0を取る確率はゼロとする. また, Markovの不等式とは, 非負確率変数Mに対し, 任意の$a>0$に対し以下の不等式が成立することである.

$$P(M\geqq a)\leqq\frac{E(M)}{a}$$

問2. 自己回帰過程

$$x_n=\beta x_{n-1}+\varepsilon_n,\quad n=1,2,\dots$$

に対し, $|\beta|<1$, 初期値$x_0=0$, 誤差項$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$は期待値0, 分散$\sigma^2$を持つ同一分布に独立に従うものとする. βの最小二乗推定量を

$$\hat\beta_N=\frac{\sum_{i=1}^N x_{i-1}x_i}{\sum_{i=1}^N x_{i-1}^2}$$

とする. 以下の問いに答えよ.

1. x_N を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N$ を用いて表せ.
2. $E(x_N^2)$ を求め, $x_N^2/N \to_p 0$ を示せ.
3. $E\left[(\sum_{i=1}^N x_{i-1}\varepsilon_i)^2\right]$ を求め, $\sum_{i=1}^N x_{i-1}\varepsilon_i/N \to_p 0$ を示せ.
4. 関係 $x_i^2 = \beta^2 x_{i-1}^2 + 2\beta x_{i-1}\varepsilon_i + \varepsilon_i^2$ から, $\sum_{i=1}^N x_{i-1}^2/N$ が確率収束する極限を求めよ.
5. $\beta_N \to_p \beta$ を示せ.

【計量経済学】

問 1．小問集合

1. 受けた教育の年数がその後の所得に与える効果をデータから検証するとしよう。観測単位iは労働者とし、y_iを現在の所得、x_iをその労働者が教育を受けた年数として以下の単回帰モデルを考える．

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i, \qquad (i = 1,2,\dots,n)$$

この単回帰モデルはx_iが内生変数（ϵ_iと相関を持つ）で OLS 推定が一致性を持たない懸念があるため、操作変数推定を行いたいとしよう。操作変数z_iの候補として「その労働者の 15 歳時点での居住地から最も近い大学までの距離」を考えたとき、この変数は操作変数として妥当だろうか？関連性の仮定 (relevance) および外生性の仮定 (exogeneity) それぞれについて、各仮定の定義を簡潔に説明したうえで議論せよ．

2. 未知パラメータθとその推定量$\hat{\theta}$に対し、バイアスを以下のように定義する。

$$bias(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

このとき以下を示せ．

$$E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2\right] = Var(\hat{\theta}) + \left\{bias(\hat{\theta})\right\}^2$$

（$E(\cdot)$は期待値、$Var(\cdot)$は分散を表す．）

3. X と Y の 2 変量データ$(X_1, Y_1), \dots, (X_N, Y_N)$があるとする。$X_i$は 0 か 1 のみをとる 2 値変数であり、$X_i = 0$のデータが$n_0$個、$X_i = 1$のデータが$n_1$個であったとする（$0 < n_0 < N, 0 < n_1 < N, n_0 + n_1 = N$）．$X_i = 0$のデータのみで計算した Y の標本平均を $\bar{Y_0}$，$X_i = 1$のデータのみで計算した Y の標本平均を$\bar{Y_1}$とする．
このとき回帰モデル$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i$の OLS 推定量

$$(\widehat{\beta_0}, \widehat{\beta_1}) = (\bar{Y} - \widehat{\beta_1}\bar{X}, \quad \frac{\Sigma_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2})$$

に対して$(\widehat{\beta_0}, \widehat{\beta_1}) = (\bar{Y_0}, \bar{Y_1} - \bar{Y_0})$が成立することを示せ．ただし$\bar{X}, \bar{Y}$はそれぞれ$X_i$と$Y_i$の標本平均を表す．

問 2. 独立で同一な分布に従う確率変数の組$(Y_i, Y_i^*, X_i, \epsilon_i)$に対して

$$Y_i^* = \beta_0 + \beta_1 X_i + \epsilon_i,$$
$$\epsilon_i | X_i \sim N(0,1),$$
$$Y_i = \begin{cases} a_1 & \text{if} \quad Y_i^* \le a_1 \\ Y_i^* & \text{if}\, a_1 < Y_i^* < a_2. \\ a_2 & \text{if}\, a_2 \le Y_i^* \end{cases}$$

が成立している．ここで$\beta_0, \beta_1, a_1, a_2$は定数であり、$a_1 < a_2$を満たす． また$N(0,1)$は平均 0 分散 1 の正規分布（標準正規分布）を表し、$\Phi(\cdot)$をその分布関数、$\phi(\cdot)$をその密度関数とする．

このとき以下の問いに答えよ．

1. $\Pr(Y_i = a_1|X_i)$および$\Pr(Y_i = a_2|X_i)$を$\Phi(\cdot)$を使った形で求めよ.
2. $z \sim N(0,1)$であるとき

$$E(z|c_1 < z < c_2) = \frac{\phi(c_1) - \phi(c_2)}{\Phi(c_2) - \Phi(c_1)}$$

となることを用いて、$E(Y_i|X_i, a_1 < Y_i < a_2)$を$\Phi(\cdot)$と$\phi(\cdot)$を使った形で求めよ.
3. $E(Y_i|X_i)$を$\Phi(\cdot)$と$\phi(\cdot)$を使った形で求めよ.
4. $\phi(\cdot)$の偏微分が

$$\frac{\partial \phi(c)}{\partial c} = -c\phi(c)$$

となることを用いて、$E(Y_i|X_i)$の偏微分

$$\frac{\partial E(Y_i|X_i)}{\partial X_i}$$

を$\Phi(\cdot)$を使った形で求めよ.