受験番号	

横浜国立大学大学院国際社会科学府
経済学専攻博士課程前期
金融プログラム特別コース

令和５年度（２次募集）
学　力　検　査　問　題

試験問題冊子（専門科目）

《注意事項》

１．試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。

２．受験番号を、この冊子と解答用紙・計算用紙に必ず記入してください。また、氏名も解答用紙に必ず記入して下さい。

３．落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合には、申し出てください。

４．試験時間　９：００～１０：００
　試験開始後４０分間は退室できません。また、試験終了１０分前からは途中退室できません。

５．問題は、「ミクロ経済学」「統計学・計量経済学」の２科目から出題されています。
　これら２科目から１科目を選択し、解答してください。
　なお、出願時に申請した科目以外でも選択可能です。

６．解答は、解答用紙に記入してください。その際、専門科目名欄の自分が選択する科目名のところに○を記入してください。記入されていない場合、採点されないことがあります。解答が用紙２枚以上に渡る場合も、必ずすべての解答用紙の専門科目名欄に○を記入してください。
　解答は、日本語で行います。ただし、外国人出願者は、英語で解答することもできます。

７．この冊子を持ち帰ってはいけません。

令和５年度（２次募集）
横浜国立大学大学院国際社会科学府
博士課程前期経済学専攻
金融プログラム特別コース

専門科目問題目次

【ミクロ経済学（金融プログラム）】

すべての問題に解答すること。

問題 1

価格支配力を有していない個人 i の財 j の消費量を x^i_j を書くこととする。また、財 j の価格は p_j をする。以下、図を作成する際には、図内の各要素が何を表しているのかを明確にすること。.

(1) 経済には 2 人の個人がいて、個人 1 の初期保有量が $(10, 4)$ で、個人 2 の初期保有量が $(3, 9)$ であるとし、個人 1 の効用関数を $u^1(x^1_1, x^1_2) = x^1_1 x^1_2$、個人 2 の効用関数を $u^2(x^2_1, x^2_2) = x^2_1(x^2_2)^2$ とする。

(i) パレート効率的な配分の集合を求めよ。

(ii) 市場均衡価格と配分を求めよ。

(2) 経済には 2 人の個人がいて、個人 1 の初期保有量が $(15, 0)$ で、個人 2 の初期保有量が $(0, 15)$ であるとし、個人 1 の効用関数を $u^1(x^1_1, x^1_2) = \min\{x^1_1, x^1_2\}$、個人 2 の効用関数を $u^2(x^2_1, x^2_2) = x^2_1 + x^2_2$ とする。市場均衡価格と配分を求め、エッジワースボックスにおいて図示せよ。

問題 2

n 人 $(n \geq 3)$ の潜在的な出資者に、ある慈善事業への出資を募る問題を考える。任意の出資者 i は、$x_i \in [0, 100]$ だけ出資することができる。慈善事業の結果は、総出資額の $b > 1$ 倍の価値をもつ。慈善事業の性格上、得られる価値は出資額に関わらず n 人に平等に分配される。全ての出資者にとってこの問題は完全情報であり、また共有知識を仮定する。

(1) 任意の出資者 i の利得関数 $u_i(x_1, \cdots, x_n)$ を書きなさい。

(2) $b < n$ の時、全てのナッシュ均衡を求めなさい。

(3) $b < n$ の時、いかなるナッシュ均衡の下での利得ベクトルもパレート最適とはならないことを示しなさい。

問題 3

平均費用逓減の公益事業を営んでいる独占企業を考える。この独占企業の生産物に対する逆需要関数が$p = 200 - Q$で、費用関数が$C = 100Q + 300$とする（C：総費用、100：限界費用、300：固定費用、Q：総生産量）。

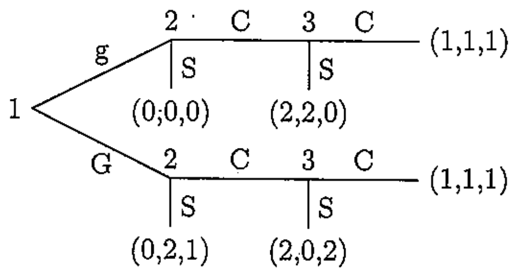
(1) この独占企業が政府から限界費用価格規制を受けたときの生産量と価格を求めよ。

(2) この独占企業が政府から限界費用価格規制を受けたとき、この市場における消費者余剰と生産者余剰を求めよ。

(3) 限界費用価格規制の時の配分はパレート効率的と言えるか。パレート効率的でないならば、死荷重を計算せよ。

問題 4

プレイヤー 1 と 2 と 3 が以下のようなゲームをプレイする。まず最初にプレイヤー 1 が g か G を選択する。次にプレイヤー 2 が C または S を選択する。プレイヤー 2 が S を選択した場合、ゲームは終了する。一方でプレイヤー 2 が C を選択した場合、プレイヤー 3 に手番がまわり、C または S を選択し、ゲームが終了する。ゲームの木は以下で表されるが、情報集合は描かれていない。利得ベクトルは、左からプレイヤー 1, 2, 3 の利得を順に表す。



いま、プレイヤー 2 はプレイヤー 1 の選択を確認した後で行動できる一方で、プレイヤー 3 はプレイヤー 1 が何を選択したかが分からない場合を考える。

(1)　情報集合を明示してゲームの木を完成させなさい。

(2)　各プレイヤーは、もし弱支配戦略があれば、弱支配戦略を選択する。このような行動に整合的な部分ゲーム完全均衡を全て求めなさい。注意：いずれのプレイヤーにも弱支配戦略が存在しない場合は、部分ゲーム完全均衡を求めることになる。

【統計学・計量経済学】

つぎの問1から問4のうち3つを選び答えよ。

問 1. 連続型確率ベクトルの同時密度関数から周辺密度関数を以下のように定めるのは周知であるとする。すなわち、X, Y, Z の同時密度関数を $f(x, y, z)$ とするとき、X, Y の周辺密度関数 $f_{X,Y}(x, y)$ は

$$f_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)dz$$

と定まる。ここでは $f_{X,Y}(x, y)$ は簡単のため $f(x, y)$ と略記する。また、x, y を与えた時の Z の条件付き密度関数 $f_{Z|X,Y}(z|x, y)$ は、$f(x, y) > 0$ のとき、

$$f_{Z|X,Y}(z|x, y) = \frac{f(x, y, z)}{f(x, y)}$$

と定まる。ここでは簡単のため $f(z|x, y)$ と略記する。また、y を与えたとき X と Z が条件付き独立であるとは

$$f(x, z|y) = f(x|y)f(z|y) \tag{1}$$

となることとする。次の問いに答えよ。

(a) 等式 (1) の必要十分条件は次の等式 (2) であることを示せ。

$$f(z|x, y) = f(z|y) \tag{2}$$

(b) 連続型確率変数 X, Y_1, Y_2, Z に対し、y_2 を与えたとき X と (Z, Y_1) が条件付き独立であるとする。すなわち、

$$f(x, z, y_1|y_2) = f(x|y_2)f(z, y_1|y_2) \tag{3}$$

を仮定する。この時、

$$f(x, y_1|y_2) = f(x|y_2)f(y_1|y_2) \tag{4}$$

を示せ。

(c) 等式 (3) を仮定したとき、

$$f(x, z|y_1, y_2) = f(x|y_1, y_2)f(z|y_1, y_2) \tag{5}$$

を示せ。

(d) 逆に等式 (4) と (5) を仮定したとき、等式 (3) が成立することを示せ。

問２．実数 $\alpha > 0, 0 < \gamma^2 < \beta < 1$、$x_0 = 0, \varepsilon_0 = 0$ に対し、期待値０分散１の独立な確率変数列 $\eta_1, \eta_2, \ldots$ を用いて、

$$\varepsilon_n = \sqrt{\alpha + \beta\varepsilon_{n-1}^2} \cdot \eta_n \tag{6}$$

$$x_n = \gamma x_{n-1} + \varepsilon_n \tag{7}$$

と定義される確率変数 $\varepsilon_n,\ x_n (n = 1, 2, \ldots)$ を考える。

(a) 数列 $a_n = E(\varepsilon_n^2)$ とするとき、a_n を α, β, n で表せ。$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(b) 条件付き期待値 $E(x_{n-1}\varepsilon_n | \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ が０となることを示せ。

(c) 数列 $b_n = E(x_n^2)$ とするとき、b_n を α, β, γ, n で表せ。$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

必要に応じて以下の定義を利用すること．

- 確率変数 X の期待値を $E[X]$，分散を $\mathrm{Var}(X)$ と書く．また確率変数 X, Y の共分散を $\mathrm{Cov}(X, Y)$ と書く．また X を与えたときの Y の条件付期待値，条件付分散をそれぞれ $E[Y|X]$，$\mathrm{Var}(Y|X)$ と書く．
- 実数に値をとる確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と確率変数 X に対して，X_n が X に確率収束するとは，任意の正数 ε に対して $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$ が成り立つことである．
- 実数に値をとる確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と確率変数 X に対して，X_n が X に分布収束するとは，確率変数 X の累積分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ の任意の連続点 x において $\lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = F(x)$ が成り立つことである．
- 確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と確率変数 X に対して，X_n が X に確率収束することを $X_n \xrightarrow{p} X$，分布収束することを $X_n \xrightarrow{d} X$ と書く．

問 3. $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数に値をとる確率変数の列，X を実数値確率変数とする．

(i) 確率変数 X が $E[X] = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ を満たすとき，任意の正数 ε に対して $|X - \mu| \geq \varepsilon$ となる確率が $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$ 以下となること，即ち，以下が成り立つことを示せ：

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

(ii) $X_n \xrightarrow{d} c$ (c は定数) ならば $X_n \xrightarrow{p} c$ を示せ．

(iii) $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{p} 0$ とする．また X は連続な累積分布関数 F_X をもつとする．このとき, $Y_n + X_n \xrightarrow{d} X$ を示せ．

(iv) $X_n \xrightarrow{p} c$ (c は定数) が成り立つとする．このとき，c で連続な関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，$g(X_n) \xrightarrow{p} g(c)$ が成り立つことを示せ．

問 4. 以下の問題の解答において，必要ならば問 3 の結果を用いてよい．
線形回帰モデル (定数項なしの単回帰モデル)

$$Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n$$

を考えよう．このモデルに対して，以下を仮定する．

[A1]: (Y_i, X_i), $i = 1, \ldots, n$ は独立同分布,
[A2]: $E[\epsilon_1 | X_1] = 0$, $E[X_1^2] > 0$,
[A3]: $E[X_1^4] < \infty$, $E[\varepsilon_1^4] < \infty$,
以下の問いに答えよ．

(i) $\beta_1 = \frac{E[Y_1 X_1]}{E[X_1^2]}$ を示せ．

(ii) $\hat{\beta}_1$ を以下の関数を最小化する値として定義する：

$$Q(\beta_1) := \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_1 X_i)^2.$$

このとき，$\hat{\beta}_1$ を求めよ．

(iii) $E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$ を示せ．

(iv) $\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1$ を示せ．