受験番号	

横浜国立大学大学院国際社会科学府
経済学専攻博士課程前期
金融プログラム特別コース

令和５年度
学　力　検　査　問　題

試験問題冊子（専門科目）

《注意事項》

１．試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。

２．受験番号を、この冊子と解答用紙・計算用紙に必ず記入してください。また、氏名も解答用紙に必ず記入して下さい。

３．落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合には、申し出てください。

４．試験時間　９：００～１０：００
　試験開始後４０分間は退室できません。また、試験終了１０分前からは途中退室できません。

５．問題は、「ミクロ経済学」「統計学・計量経済学」の２科目から出題されています。
　これら２科目から１科目を選択し、解答してください。
　なお、出願時に申請した科目以外でも選択可能です。

６．解答は、解答用紙に記入してください。その際、専門科目名欄の自分が選択する科目名のところに○を記入してください。記入されていない場合、採点されないことがあります。解答が用紙２枚以上に渡る場合も、必ずすべての解答用紙の専門科目名欄に○を記入してください。
　解答は、日本語で行います。ただし、外国人出願者は、英語で解答することもできます。

７．この冊子を持ち帰ってはいけません。

令和５年度

横浜国立大学大学院国際社会科学府

博士課程前期経済学専攻

金融プログラム特別コース

専門科目問題目次

【ミクロ経済学（金融プログラム）】

すべての問題に解答すること。

問題 1

Part A: 財 1 の需要量を x_1、財 2 の需要量を x_2 とし、財 1 の価格を p_1、財 2 の価格を p_2、所得を I とする。消費者の効用関数は $u(x_1, x_2) = 2\log x_1 + \log x_2$ によって与えられている（log は自然対数を意味する)。なお、消費者はプライステイカーであると仮定する。

(1) 消費者の予算制約の下での効用最大化問題を記述せよ。

(2) 消費者の需要関数を求めよ。

Part B: 財 1 の需要量を x_1、財 2 の需要量を x_2 とし、財 1 の価格を p_1、財 2 の価格を p_2、所得を I とする。消費者の効用関数は $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ によって与えられている。なお、消費者はプライステイカーであると仮定する。

(1) 消費者の予算制約の下での効用最大化問題を記述せよ。

(2) 消費者の需要関数を求めよ。

問題 2

(1) プライステイカーである企業の財の費用関数が $C(y) = \frac{y^2}{2} + 2$, $(y \geq 0)$ であるとする。また、p を財の価格とする。このとき、企業の利潤最大化問題を解いて利潤関数を求めよ。

(2) プライステイカーである企業の財の費用関数が

$$C(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2} + 2 & \text{if} \quad y > 0, \\ 0 & \text{if} \quad y = 0 \end{cases}$$

であるとする。また、p を財の価格とする。このとき、企業の利潤最大化問題を解いて利潤関数を求めよ。

問題 3

３人のプレイヤー 1, 2, 3 が政策 A, B, C のいずれかに同時に投票する状況を考える。投票結果は多数決により決まり、３人が異なる政策に投票した場合は、政策 A が投票結果になると仮定する。また各プレイヤーは必ずいずれかの政策に投票するものとする。各プレイヤーの政策から得られる利得は

$$u_1(A) = u_2(B) = u_3(C) = 3$$
$$u_1(B) = u_2(C) = u_3(A) = 2$$
$$u_1(C) = u_2(A) = u_3(B) = 1$$

である。

(1) 各プレイヤーの（純粋）戦略空間を S_i $(i \in \{1,2,3\})$ とする。また $f : S_1 \times S_2 \times S_3 \to \{A, B, C\}$ を設問の条件を満たす投票関数とする。純粋戦略ナッシュ均衡を定義せよ。

(2) 純粋戦略ナッシュ均衡を全て求めよ。

問題 4

２人のプレイヤー 1,2 が x の価値をもつ財の取り分を交渉する状況を考える。第１ステージでは、プレイヤー 1 が提案者となり、$(s_1, 1-s_1)$ という割合の提案を行う。プレイヤー 2 は提案を受け入れるか受け入れないかを決める。受け入れた場合は $(s_1, 1-s_1)$ の割合で取り分を得る。受け入れない場合は第２ステージに進む。第２ステージでは、プレイヤー 2 が $(1-s_2, s_2)$ という割合の提案を行う。プレイヤー 1 が受け入れた場合は $(1-s_2, s_2)$ の割合で取り分を得る。受け入れない場合であってもゲームは終了し、プレイヤー達は一定の割合で財を得る。第２ステージでは財の価値は $\delta > 0$ 倍となる。プレイヤーの利得は財の取り分の価値とする。

(1) $\delta < 1$ の場合を考える。第２ステージの終わりにプレイヤー 1 が提案を受け入れない場合は $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の割合で財を得る。部分ゲーム完全均衡における利得を求めよ。

(2) 第２ステージの終わりにプレイヤー 1 が提案を受け入れない場合は $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ の割合で財を得る。いかなる部分ゲーム完全均衡においても第１ステージでゲームが終了しない δ の範囲を求めよ。

【統計・計量経済学（金融プログラム）】

以下の４問から３問を選び答えよ。

問 1. 確率変数 X_1, X_2 は独立に同一な確率関数

$$p(x) = \theta^x(1-\theta), \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

にしたがうものとする。ここで $0 < \theta < 1$ である。以下の問いに答えよ。このとき、$0 < \theta < 1$ に対する次の等式は自由に使ってよい。その際左辺の微分は、右辺を項別微分することにより得られることに注意せよ。

$$\frac{1}{1-\theta} = 1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4 + \cdots.$$

また x, y, z は非負整数であるとせよ。

(1) $E(X_1)$ を θ で表せ。
(2) $P(X_1 \geq x)$ を θ で表せ。
(3) $P(X_1 \geq x + z | X_1 \geq x)$ を θ で表せ。
(4) $E[(X_1 - x)|X_1 \geq x]$ を θ で表せ。ここで

$$E[(X_1 - x)|X_1 \geq x] = \frac{\sum_{k=x}^{\infty}(k-x)p(k)}{P(X_1 \geq x)}$$

(5) $Y = X_1 + X_2$ とするとき、$P(Y = y)$ を θ で表せ。
(6) $x \leq y$ に対して条件付き確率 $P(X_1 = x|Y = y)$ を求めよ。
(7) 条件付期待値 $E[X_1|Y = y]$ を求めよ。

問 2. 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立であり、いずれも以下の密度関数をもつ一様分布にしたがうものとする。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0. & x < 0 \text{ or } x > 1. \end{cases}$$

確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ を

$$Y_1 = X_1, \quad Y_2 = X_1X_2, \quad Y_3 = X_1X_2X_3, \quad \ldots, \quad Y_n = X_1X_2\cdots X_n$$

によって定義する。$S_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ として、以下の問いに答えよ。

(1) $E(Y_i), (1 \leq i \leq n)$ を求めよ。
(2) $E(S_n)$ を求めよ。
(3) $E(Y_i^2), (1 \leq i \leq n)$ を求めよ。
(4) $E(Y_iY_j), (1 \leq i < j \leq n)$ を求めよ。
(5) $E(S_n^2)$ を求めよ。
(6) $Var(S_n)$ を求めよ。

問 3. 観測値 $y_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ は

$$y_i = \alpha + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

によって生成されるものとする．ここで，α は未知の定数，$\varepsilon_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ は独立な観測されない確率変数で，

$$E(\varepsilon_i) = 0, \quad E(\varepsilon_i^2) = \delta_i^2\sigma^2, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

とする。ここで $\delta_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$ は既知の定数ですべてが同一ではなく、$\sigma > 0$ は未知の定数である。$\tilde{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} y_i/n$ とし、以下の問いに答えよ。

(a) α の推定量 $\hat{\alpha}$ を、

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{y_i}{\delta_i} - \frac{a}{\delta_i})^2$$

を最小にする a とする。$\hat{\alpha}$ を求めよ。

(b) $E(\tilde{\alpha})$ と $E(\hat{\alpha})$ を求めよ。

(c) $Var(\tilde{\alpha})$ と $Var(\hat{\alpha})$ を求めよ。

(d) $Var(\tilde{\alpha})$ と $Var(\hat{\alpha})$ との大小関係を示せ。以下の不等式は自由に使ってよい。

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

問 4. 観測値 $(x_i, y_i)(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$y_i = \beta x_i + \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

が成立している。ここで，β は未知の定数，$x_1, \ldots, x_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ は独立な確率変数で，$x_1, \ldots, x_n$ は同一な確率分布に従い、$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ も同一な確率分布に従うものとし、

$$E(x_i) = E(\varepsilon_i) = 0, \quad E(x_i^2) = \sigma_X^2, \quad , E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2, \quad , E(x_i^4) < \infty$$

とする.

$$\hat{\beta}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\beta}_n x_i)^2$$

とする。以下の確率論の知識は自由に使ってよい。

独立で同一な分布に従う $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ に対して、$E(Z_i) = \mu, Var(Z_i) = \sigma^2$ とすると、$n \to \infty$ のとき

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i/n \to_p \mu, \quad \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \mu)/\sqrt{n} \to_d N(0, \sigma^2)$$

ここで、$\to_p$ は確率収束を表し、$\to_d$ は分布収束を表す。

a, b を定数として、$n \to \infty$ のとき、$X_n \to_p a$、$Y_n \to_p b$、$Z_n \to_d Z$ とすると、

$$X_n \pm Y_n \to_p a \pm b, \quad X_n Y_n \to_p ab, \quad X_n/Y_n \to_p a/b, \quad X_n Z_n \to_d aZ$$

ただし、3つ目の収束は $b \neq 0$ を仮定する。以下の問いに答えよ.

(a) $\hat{\beta}_n \to_p \beta$ を示せ。

(b) $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)$ が分布収束する極限を求めよ。

(c) $\hat{\sigma}_n^2 \to_p \sigma^2$ を示せ。