受験番号	

横浜国立大学大学院国際社会科学府
経済学専攻博士課程前期
金融プログラム特別コース

平成３１年度（２次募集）
学　力　検　査　問　題

試 験 問 題 冊 子
（ 専 門 科 目 ）

《注意事項》

１．<u>試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。</u>

２．受験番号を、この冊子と解答用紙に必ず記入してください。また、氏名も解答用紙に必ず記入して下さい。

３．落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合には、申し出てください。

４．試験時間

　９：００～１０：１５です。

　試験開始後４０分間は、退室できません。また、試験終了１０分前からは途中退室できません。

５．問題は、「ミクロ経済学」「統計・計量経済学」「経済数学」の３科目から出題されています。

　これら３科目から１科目を選択し、解答してください。

６．解答は、解答用紙に記入してください。その際、<u>専門科目名欄の自分が選択する科目名のところに○を記入してください</u>。<u>記入されていない場合、採点されないことがあります</u>。解答が用紙２枚以上に渡る場合も、必ずすべての解答用紙の専門科目名欄に○を記入してください。

　解答は、日本語で行います。ただし、外国人出願者については、英語で解答することもできます。

７．この冊子を持ち帰ってはいけません。

平成３１年度（２次募集）
横浜国立大学大学院国際社会科学府
博士課程前期経済学専攻
金融プログラム特別コース

専門科目問題目次

[ミクロ経済学]

すべての問いに対し解答すること。

問題 1

ある企業が、労働 L と資本 K を投入して 1 種類の財を生産している。この企業の生産関数を $F(L,K)=\sqrt{L}+\sqrt{K}$ とし、時間あたりの賃金を w、資本のレンタル・プライスを r とおく。ただし、w,r は正とする。次の問いに答えなさい。

(1) この企業は、労働と資本に関してプライス・テイカーであるとする。費用最小化問題を解くことにより、費用関数を求めなさい。

(2) この企業が生産する財の市場需要関数を $D(p)=2-p$ とする。この財に関してこの企業が独占企業であるとき、価格と生産量を求めなさい。

(3) (2) において $w=r=1$ とするとき、消費者余剰および生産者余剰を求めなさい。

問題 2

2 種類の財（X 財と Y 財）が存在し、2 人の消費者 A,B がいる純粋交換経済を考える。各消費者 A,B の初期保有はそれぞれ $e_A=(6,3), e_B=(10,1)$ であるとし、各消費者 A,B の効用関数はそれぞれ $u_A(x_A,y_A)=\sqrt{x_A}+\sqrt{y_A}$、$u_B(x_B,y_B)=\sqrt{x_B}+\sqrt{y_B}$ であるとする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) 初期保有配分を通る無差別曲線をエッジワース・ボックス内に描きなさい。どの点が初期保有配分で、どの曲線が消費者 A の無差別曲線で、どの曲線が消費者 B の無差別曲線かを明記すること。

(2) ワルラス均衡（競争均衡）を求めなさい。

問題3

以下の問いに答えなさい。

(1) 下の利得表で表される 2 人標準形ゲームを考える（$a, b, \ldots, h$はすべて実数である）。(T, R)がナッシュ均衡であるとき、$a, b, \ldots, h$が満たすべき不等式をすべて答えよ。

		2	
		L	R
1	T	a, b	c, d
	B	e, f	g, h

(2) 下の利得表で表されるゲームのナッシュ均衡を、混合戦略を含めてすべて求めよ。

		2	
		L	R
1	T	3, 5	1, 2
	B	−2, 1	4, 3

問題4

2 人の市民$N = \{1,2\}$がいる Y 市は、市内を流れる河川に橋を建設するか否かを検討している。橋が建設された場合、市民 1 は$V_1 = 100$だけの便益を得て、市民 2 は$V_2 = 70$だけの便益を得ることが分かっている。橋の建設コストは$C = 120$である。Y 市は橋建設のための寄付金t_i（$i = 1,2$、また$t_i \geq 0$とする）を募り、総寄付額が$t_1 + t_2 \geq C$のとき橋を建設することにした。ただし、寄付金t_iは橋が建設されるか否かにかかわりなく返金されることはないものとする。したがって、橋が建設されたときの市民$i \in N$の利得は$u_i = V_i - t_i$、橋が建設されなかったときの利得は$u_i = -t_i$である。

(1) 各市民$i \in N$が、同時に寄付額t_iを決定する場合を考える。このとき、純粋戦略のナッシュ均衡をすべて求めよ。

(2) 最初に市民 1 が寄付金t_1を決定し、その金額を観察した後、市民 2 が寄付金t_2を決定する場合を考える。このとき、部分ゲーム完全均衡を求めよ。

(3) 最初に市民 1 が寄付金t_1を決定し、その金額を観察した後、市民 2 が寄付金t_2を決定する場合を考える。更に、ルールを変更して、もし総寄付額$t_1 + t_2$が建設コストCに達しなかったならば、Y 市は不足分$D = C - (t_1 + t_2)$に対して、各市民から税金$\tau = D/2$を徴収することで橋を建設することにした。すなわち、市民iの利得は

$$u_i = \begin{cases} V_i - t_i & \text{if } D \leq 0 \\ V_i - t_i - \tau & \text{if } D > 0 \end{cases}$$

となる。このとき、部分ゲーム完全均衡の結果を求めよ。

【統計・計量経済学】

以下の問1〜4のうちから3問選び解答すること.

問1. 確率変数 N は確率分布

$$P(N=n)=(1-q)q^n, \quad n=0,1,2,\ldots$$

に従い、確率変数 X の $N=n$ を与えたときの条件付き確率は

$$P(X=x|N=n)=\frac{n!}{x!(n-x)!}(1-p)^x p^{n-x}, \quad x=0,1,\ldots,n$$

で与えられるものとする. ただし, $p,q\in(0,1)$ とする. 次の問いに答えよ. ただし、以下の事実は自由に用いてよい。$r\in(0,1)$ に対して等比級数 $\frac{1}{1-r}=\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ の k 階の微分は、右辺において k 階の項別微分をすることにより求められる。すなわち

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^k\frac{1}{(1-r)}=\frac{k!}{(1-r)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot r^{n-k}, \quad k=1,2,3\ldots.$$

(a) N の期待値を求め、$E(X)$ を条件付き期待値の性質 $E(E(X|N))$ によって求めよ。
(b) $0\leq x\leq n$ に対して, 同時確率 $P(N=n,X=x)$ を求めよ.
(c) $0\leq x$ に対して, 確率 $P(X=x)$ を求めよ.
(d) $E(X)$ を上で求めた X の確率分布から求めよ。

問2. 確率変数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,$ は独立であり、いずれも以下の密度関数を持つ一様確率変数とする。

$$f(\varepsilon)=\begin{cases}1, & 0\leq\varepsilon\leq 1\\ 0. & \text{上記以外}\end{cases}$$

確率変数 $X_0,X_1,X_2,\cdots,$ を

$$X_0=0, \quad X_n=(X_{n-1}+1)\varepsilon_n, \quad n=1,2,\ldots$$

によって帰納的に定義する。以下の問いに答えよ。

(a) $E(\varepsilon_1)$ と $E(\varepsilon_1^2)$ を計算せよ。
(b) 数列 $a_n=E(X_n), n=1,2,\ldots$ に対し、a_n の満たす差分方程式（漸化式）求め、a_n を n だけを用いて表せ。
(c) 数列 $b_n=E(X_n^2), n=1,2,\ldots$ に対し、b_n の満たす差分方程式（漸化式）求め、b_n を n だけを用いて表せ。

【統計・計量経済学（金融プログラム）】

問 3.　確率変数 e_1, e_2 は、期待値 0、分散 1、共分散 $\mathrm{cov}(e_1, e_2) = \rho$ を持つ。ただし、$|\rho| < 1$ とする。x_1, x_2 は実数値をとる非確率変数であり、$x_1 \neq 0, x_2 \neq \rho x_1$ とする。実数 β に対し、確率変数 y_1, y_2 は $y_t = \beta x_t + e_t \quad (t = 1, 2)$ によって発生されるとき、次の問に答えよ。

(1) $\hat{\beta} = \dfrac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{x_1^2 + x_2^2}$ の期待値と分散を求めよ。

(2) $\tilde{y}_1 = y_1\sqrt{1-\rho^2}, \tilde{y}_2 = y_2 - \rho y_1\ \tilde{x}_1 = x_1\sqrt{1-\rho^2}, \tilde{x}_2 = x_2 - \rho x_1$ とするとき、

$V(\tilde{y}_1),\ V(\tilde{y}_2), \mathrm{cov}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ を求めよ。

(3) $b = \dfrac{\tilde{x}_1 \tilde{y}_1 + \tilde{x}_2 \tilde{y}_2}{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2}$ に対し、期待値と分散を求めよ。

(4) $V(b), V(\hat{\beta})$ の大小関係を示せ。

問 4. 互いに無相関の確率変数 $e_1, \ldots, e_n$ は期待値 0、互いに異なる分散 σ_i^2 を持つ。

$x_1, \ldots, x_n$ は実数値をとる非確率変数であり、少なくとも一つは 0 と異なる値をとる。実数 β に対し、確率変数 $y_1, \ldots, y_n$ は $y_t = \beta x_t + e_t \quad (t = 1, \ldots, n)$ に従って発生すると仮定する。

(1) $\hat{\beta} = \dfrac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ の期待値と分散を求めよ。

(2) $b = \dfrac{x_1 y_1 / \sigma_1^2 + \cdots + x_n y_n / \sigma_n^2}{x_1^2 / \sigma_1^2 + \cdots + x_n^2 / \sigma_n^2}$ の期待値と分散を求めよ。

(3) $\hat{\beta}$ の分散と b の分散の大小関係を示せ。ただし、$s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ に対して、

$(s_1 t_1 + \ldots + s_n t_n)^2 \leq (s_1^2 + \ldots + s_n^2)(t_1^2 + \ldots + t_n^2)$ が成立することは証明なく用いてよい

31 254

【経済数学】

以下のすべての問題に解答すること。

問題 1. 実数値数列 $\{x_n\}$ に対して、

$$\begin{aligned}\limsup_{n} x_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right)\\ \liminf_{n} x_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} x_m\right)\end{aligned}$$

と定義する。数列 $\{x_n\}$ が以下で表わされるとき、$\limsup_{n\to\infty} x_n$ と $\liminf_{n\to\infty} x_n$ を求めなさい。

$$x_n = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{3}n}{2n} & \text{if} \quad n = 2m-1 \ (m \in \mathbb{N}) \\ \sin\frac{(n+1)\pi}{4} & \text{if} \quad n = 2m \ (m \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

問題 2. n 変数実数値関数 f がどのような $t > 0$ についても

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, \cdots, x_n)$$

を満たすとする。

$$kf(x_1, \cdots, x_n)$$

を $x_1 \cdots, x_n$ の偏微分係数を用いて表しなさい。

問題 3. 以下の等式条件付き最大化問題を考える。目的関数を最大にする $x_1, \cdots, x_n$ を求めなさい。

$$\max_{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{\sum_{j=1}^{n} j} \log x_i$$

$$s.t. \ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = I$$

ここで、$p_i > 0$, $(i \in \{1, 2, \cdots, n\})$ かつ $I > 0$ とする。

31 255

問題 4. $(n \times n)$ 実数値行列 A を $a_{i,i+1} = (\frac{1}{2})^{i+1} + b,\ i = 1, 2, c \ldots, n-1$, $a_{n,1} = \frac{1}{2} + b$、それ以外の全ての要素 $a_{i,j} = (\frac{1}{2})^j\ (j \neq i+1)$ とする。つまり、

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} + b & \frac{1}{2^3} & \cdots & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} + b & & \frac{1}{2^n} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{1}{2^n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & & \frac{1}{2^n} + b \\ \frac{1}{2} + b & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} & \cdots & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$$

ここで b は実数上の定数とする。

(a) $\det A$ を求めなさい。

(b) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(-b)^{n-1}} \det A$ を求めなさい。

問題 5. 連立微分方程式、

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 4x_1(t) - 5x_2(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -6x_1(t) + 5x_2(t),$$

の初期条件が $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 12)$ のとき、特殊解を求めなさい。