受験番号	

横浜国立大学大学院国際社会科学府
経済学専攻博士課程前期
金融プログラム特別コース

平成３１年度
学 力 検 査 問 題

試 験 問 題 冊 子
（ 専 門 科 目 ）

《注意事項》

1．試験開始の合図があるまで、この冊子を開いてはいけません。

2．受験番号を、この冊子と解答用紙に必ず記入してください。また、氏名も解答用紙に必ず記入して下さい。

3．落丁、乱丁、印刷不鮮明の箇所があった場合には、申し出てください。

4．試験時間

９：００～１０：１５です。

試験開始後４０分間は、退室できません。また、試験終了１０分前からは途中退室できません。

5．問題は、「ミクロ経済学」「統計・計量経済学」「経済数学」の３科目から出題されています。

これら３科目から１科目を選択し、解答してください。

なお、出願時に申請した科目以外でも選択可能です。

6．解答は、解答用紙に記入してください。その際、専門科目名欄の自分が選択する科目名のところに○を記入してください。記入されていない場合、採点されないことがあります。解答が用紙２枚以上に渡る場合も、必ずすべての解答用紙の専門科目名欄に○を記入してください。

解答は、日本語で行います。ただし、外国人出願者については、英語で解答することもできます。

7．この冊子を持ち帰ってはいけません。

平成３１年度
横浜国立大学大学院国際社会科学府
博士課程前期経済学専攻
金融プログラム特別コース

専門科目問題目次

[ミクロ経済学]

すべての問いに対し解答すること。

問題 1

ある企業が 1 種類の財を生産しているとする。この財の質を表す定数を a (> 0) とするとき、市場における需要関数は $D(p) = a(1-p)$、企業の費用関数は $C(y) = \frac{1}{2}ay^2$ となるとする。ただし、$0 \leq p \leq 1$、$y \geq 0$ とする。次の問いに答えなさい。

(1) 完全競争の市場を考える。$a = 1$ とするとき、市場均衡価格、および、均衡における生産量を求めなさい。さらに、そのときの消費者余剰および生産者余剰の大きさを求めなさい。

(2) 完全競争の市場を考える。総余剰の大きさが最大となるような a の値を求めなさい。

(3) この企業が独占企業であるとする。$a = 1$ とするとき、利潤を最大にするような価格と生産量を求めなさい。さらに、そのときの消費者余剰および生産者余剰の大きさを求めなさい。

(4) この企業が独占企業であるとする。この企業の利潤が最大となるような a の値、および、そのときの生産量と利潤の大きさを求めなさい。

問題 2

(1) 2 種類の財（X 財と Y 財）が存在する経済を考える。各財の消費量 x, y と価格 p_x, p_y、および、消費者の所得 I はいずれも正であるとする。消費者の効用関数が $u(x, y) = x + y + 2\sqrt{xy}$ であるとき、この消費者の（ワルラスの）需要関数を求めなさい。ただし、消費者はプライス・テイカーであるとする。

(2) 2 種類の財（X 財と Y 財）が存在し、2 人の消費者 A, B がいる純粋交換経済を考える。各消費者 A, B の初期保有はそれぞれ $e_A = (4, 2), e_B = (2, 1)$ であるとし、各消費者 A, B の効用関数はそれぞれ $u_A(x_A, y_A) = x_A y_A$、$u_B(x_B, y_B) = x_B y_B$ であるとする。このとき、次の問いに答えなさい。

(a) 初期保有配分がパレート効率的であることを示しなさい。

(b) 初期保有配分がワルラス均衡配分（競争均衡配分）となるとき、均衡価格比を求めなさい。

問題 3

二つの企業が寡占市場において価格競争を行っている。各企業の生産費用関数は同一で、企業 i $(i=1,2)$ の生産量 $q_i \geq 0$ に対する総生産費用は

$$C_i(q_i) = 2q_i$$

である。各企業が生産する財は製品差別化されており、各企業がつける価格の組 (p_1, p_2) に対して、企業 i の財に対する需要関数は

$$D_i(p_i, p_j) = 5 - p_i + \frac{p_j}{4}$$

で与えられる（ただし $j \neq i$）。

(1) 企業 2 の価格 p_2 を所与としたときの企業 1 の利潤最大化問題を定式化しなさい。

(2) 二企業が同時に価格を決めるとき、ナッシュ均衡における各企業の価格を求めよ。

問題 4

部品メーカー（プレーヤー 1）と組立メーカー（プレーヤー 2）の間の契約交渉を考える。部品メーカーが x 単位の部品を生産するのにかかる総費用は $c(x) = 2x$ である。一方、組立メーカーは部品を x 単位調達すると、そこから $V(x) = 8\sqrt{x}$ だけの価値の最終財を組み立てることができる。交渉は以下のような手続きに従って行われる。組立メーカーは部品供給量と支払い額の組 (x, P) を部品メーカーに提案する。部品メーカーが受け入れればその契約が結ばれる。部品メーカーが拒否すれば交渉は決裂し、部品は供給されない。契約 (x, P) が結ばれれば、部品メーカーの利得は $u_1 = P - c(x)$、組立メーカーの利得は $u_2 = V(x) - P$ である。交渉が決裂した場合、両者の利得は 0 である。

(1) 社会的に望ましい、すなわち両者の利得合計 $u_1 + u_2$ を最大化するような部品供給量 x^e を求めよ。

(2) この交渉の部分ゲーム完全均衡を求めよ。

(3) 上記の契約交渉の前に、部品メーカーがコスト削減投資を行うことができるとする。第 1 期に、部品メーカーは生産コスト削減のための投資をするか否かを決定する。投資を行うと、契約交渉の結果にかかわらず投資コスト $F = 3$ が発生する。投資を行っ

た場合の部品メーカーの費用関数は $c_L(x)=x$、投資を行わなかった場合の費用関数は $c_H(x)=2x$ である。両者が部品メーカーの投資の意思決定を観察したあと、第 2 期に契約交渉が行われる。すなわち、組立メーカーが部品供給量と支払い額の組 (x,P) を提案し、部品メーカーはそれを受け入れるか拒否するかを決定する。

(a) 社会的な望ましさの観点から、部品メーカーは投資を行うべきか否か答えよ。

(b) 部分ゲーム完全均衡の結果を求めよ。

#【統計・計量経済学】

以下の問1〜4のうちから3問選び解答すること.

問1. 確率変数 X は二項分布

$$P(X=x)=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,\ldots,n$$

に従い、確率変数 Y の $X=x$ を与えたときの条件付き確率は

$$P(Y=y|X=x)=\frac{x!}{y!(x-y)!}q^y(1-q)^{x-y}, \quad y=0,1,\ldots,x$$

で与えられるものとする. ただし, n は正の整数, $p,q\in(0,1)$ とする. 次の問いに答えよ.

(a) $0\le y\le x\le n$ に対して, 同時確率 $P(X=x,Y=y)$ を求めよ.
(b) $0\le y\le n$ に対して, 確率 $P(Y=y)$ を求めよ.
(c) $Z=X-Y$ としたとき, $0\le y, 0\le z, y+z\le n$ に対して, 同時確率 $P(Z=z,Y=y)$ を求めよ.
(d) $0\le y+z\le n$ に対して, 条件付き確率 $P(Z=z|Y=y)$ を求めよ.
(e) $0\le y+z\le n$ に対して, 条件付き期待値 $E(Z|Y=y)$ を求めよ.

問2. 独立な確率変数 T_1,T_2 は、それぞれ以下の密度関数を持つものとする。

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}, \quad t>0.$$

ここで、$\lambda>0$ とする。$U=\min\{T_1,T_2\}$、$V=\max\{T_1,T_2\}$ として以下の問いに答えよ。

(a) T_1 の期待値 $E(T_1)$ と分散 $Var(T_1)$ を求めよ。
(b) U の分布関数 $F(u)=P(U\le u)$ を求めよ。
(c) U の密度関数 $f(u)$ を求めよ。
(d) U の期待値 $E(U)$ と分散 $Var(U)$ を求めよ。
(e) V の分布関数 $G(v)=P(V\le v)$ を求めよ。
(f) V の密度関数 $g(v)$ を求めよ。
(g) V の期待値 $E(V)$ と分散 $Var(V)$ を求めよ。

問３、 互いに無相関の確率変数 $e_1,\ldots,e_n$ は、期待値０、分散 σ^2 を持つ。 $x_1,\ldots,x_n$ は実数値をとる非確率変数であり、少なくとも一つは０とは異なる値をとる。実数 β に対し、確率変数 $y_1,\ldots,y_n$ は $y_t=\beta x_t+e_t \quad (t=1,\ldots,n)$ によって発生するとき、次の問に答えよ。 ただし、確率変数 e にたいし $E(e), V(e)$ はその期待値と分散を表す。

(1) $\hat{\beta}=\dfrac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2}$ の期待値と分散を求めなさい。

(2) 非確率変数 $c_1,\ldots,c_n$ に対して、$b=c_1y_1+\ldots+c_ny_n$ とするとき、β の値にかかわらず $E[b]=\beta$ となる条件を、$c_1,\ldots,c_n$ について求めなさい。

(3)小問(2)で求めた条件下で、$V(\hat{\beta})\le V(b)$ を示しなさい。ただし、実数 $s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n$ に対して、$(s_1t_1+\ldots+s_nt_n)^2\le(s_1{}^2+\ldots+s_n{}^2)(t_1{}^2+\ldots+t_n{}^2)$ が成立することは証明なく用いてよい。

問４. 互いに無相関の確率変数 $e_1,..,e_n$ は期待値０、互いに異なる分散 σ_i^2 を持つ。

$x_1,\ldots,x_n$ は実数値をとる非確率変数であり、少なくとも一つは０と異なる値をとる。実数 β に対し、確率変数 $y_1,\ldots,y_n$ は $y_t=\beta x_t+e_t \quad (t=1,\ldots,n)$ に従って発生すると仮定する。

(1) $\hat{\beta}=\dfrac{x_1y_1+\cdots+x_ny_n}{x_1{}^2+\cdots+x_n{}^2}$ の期待値と分散を求めなさい。

(2) $b=\dfrac{x_1y_1/\sigma_1^2+\cdots+x_ny_n/\sigma_n^2}{x_1{}^2/\sigma_1^2+\cdots+x_n{}^2/\sigma_n^2}$ の期待値と分散を求めなさい。

(3) $\hat{\beta}$ の分散は、b の分散より大きいか等しいことを示しなさい。ただし、実数 $s_1,\ldots,s_n,t_1,\ldots,t_n$ に対して、$(s_1t_1+\ldots+s_nt_n)^2\le(s_1{}^2+\ldots+s_n{}^2)(t_1{}^2+\ldots+t_n{}^2)$ が成立することは証明なく用いてよい

31 157

【経済数学】

以下のすべての問題に解答すること。

問題 1. 実数値数列 $\{x_n\}$ に対して、

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{m\geq n} x_m\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{m\geq n} x_m\right)$$

と定義する。以下に答えなさい。

(a) 数列 $\{x_n\}$ を $x_n = \sin n$ とするとき、$\limsup_{n\to\infty} x_n$ および $\liminf_{n\to\infty} x_n$ を求めなさい。

(b) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_n = (-2)^{\cos(\frac{n\pi}{2})}\frac{5n}{2n+3}$$

とするとき、$\limsup_{n\to\infty} x_n$ および $\liminf_{n\to\infty} x_n$ を求めなさい。

問題 2. 以下の等式条件付き最大化問題を考える。目的関数を最大にする x_1, x_2, x_3 を求めなさい。

$$\max_{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3} x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_3^{\frac{1}{3}}$$
$$s.t.\ (x_1-4)^2+(x_2-4)^2+(x_3-4)^2 = 9$$

問題 3. (4×4) 実数値行列 A を $a_{i,i+1} = a+x$、それ以外の全ての要素 $a_{i,j} = a\ (j \neq i+1)$ とする。つまり、

$$A = \begin{pmatrix} a & a+x & a & a \\ a & a & a+x & a \\ a & a & a & a+x \\ a+x & a & a & a \end{pmatrix}$$

ここで a は定数、x は実数上の変数。

(a) $\det A$ を求めなさい。

(b) $a = -\frac{1}{3}$ のとき $\det A$ を最小にする x を求めなさい。

問題 4. 連立微分方程式、

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = 3x_1(t) + 5x_2(t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t),$$

の初期条件が $(x_1(0), x_2(0)) = (4, 2)$ のとき、特殊解を求めなさい。

問題 5. 以下の等式、

$$-\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \min\{e^x - 1, 0\}\, e^{-\frac{(x+1)^2}{4}} dx = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

が成り立つことを示しなさい。ただし、

$$\min\{y, 0\} = \begin{cases} y, & \text{if } \ y < 0 \\ 0, & \text{if } \ y \geq 0 \end{cases},$$

で、

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

は標準正規分布関数である。